quale equazione del luogo geometrico dei poli della trasversale (i) rispetto alle coniche circoscritte al quadrangolo. Quest'equazione concorda con quella della conica dei nove punti, dunque :

II luogo geometrico dei poli di una retta quahivoglia rispetto al sistema delle coniche circoscritte ad un quadrangolo e la conica dei nove punti corrispondente a quella retta.

Notiamo che fra le infinite coniche circoscritte al quadrangolo, due sonò tangenti alla trasversale (i), per cui il polo di questa trasversale rispetto a ciascuna di quelle due coniche è il punto di contatto rispettivo. Ma la conica dei nove punti contiene i poli della trasversale rispetto al sistema delle infinite coniche circoscritte al quadrangolo, dunque essa contiene anche quei due punti di contatto. Rammentando quindi che le coppie di punti in cui una trasversale qualunque è incontrata dalle coniche circoscritte ad un quadrangolo formano una involuzione quadratica, possiamo formulare il seguente teorema :

I punti doppi dell'involuzione che le coniche circoscritte ad un quadrangolo determinano su di una trasversale qualunque, sono i punti in cui questa e incontrata dalla conica dei nove punti ad essa corrispondente.

Importa osservare che le proprietà precedentemente dimostrate si potrebbero dedurre semplicemente dal teorema che *le polari di un punto rispetto alle infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo passano tutte per un medesimo punto.* Infatti, in virtù di questo teorema, basta considerare due sole coniche del sistema, e per semplicità si possono adoperare a quest'uopo due coppie di lati opposti del quadrangolo, per es. quelli che concorrono in *A* ed in *B.* Ora, la polare di un punto rispetto ad una coppia di rette è una retta unica ed individuata che passa pel loro punto di concorso ; e reciprocamente, data nel piano una trasversale, non esiste in questa che un punto unico ed individuato il quale abbia per polare una data retta, passante pel punto di concorso anzidetto. Dunque, mentre il punto si muove sulla trasversale, le sue due polari generano due fasci projettivi, e quindi s'intersecano lungo una conica passante per i punti *A* e *B.* Questa conica passa anche per C, giacché essa avrebbe potuto essére generata egualmente dalle due coppie di lati opposti che concorrono in *B* ed in *C.*

Consideriamo specialmente in questa conica i punti che corrispondono a quelli nei quali la trasversale è segata dai lati del quadrangolo. La retta o i ossia *Ai* sega la trasversale in un punto O, epperò la polare di questo punto rispetto alla coppia di rette *Ai, A2* coincide colla stessa *Ai.* È chiaro dunque che il punto d'incontro delle due polari di *Q* è il conjugato armonico di O rispetto al segmento o i : dunque la conica passa per questo punto conjugato armonico. Lo stesso evidentemente si può dire d'ogni altro segmento analogo.

Le proprietà dimostrate nel precedente articolo ed al principio di questo sono dunque una facile ed immediata conseguenza del teorema surricordato.